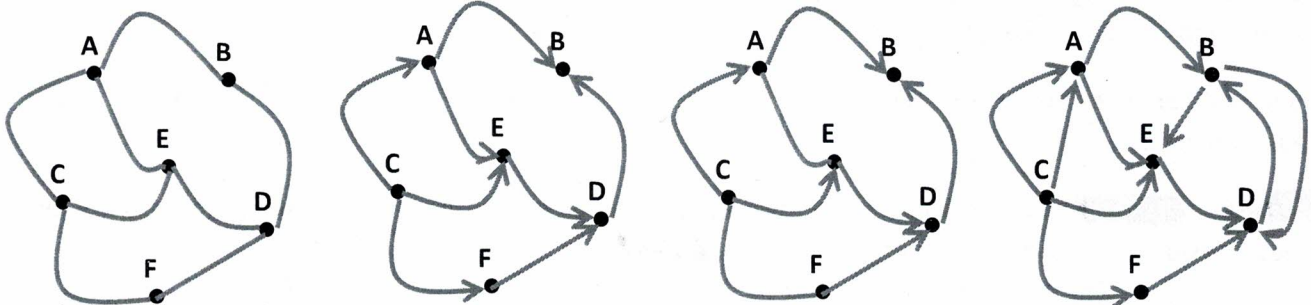


Graphes

1. Introduction

Un graphe est un modèle mathématique.



On a des points, associés à des étiquettes (A,B,C...) reliés entre eux par des liens orientés ou non.

Une théorie mathématique avec des propriétés et théorèmes est basée sur les graphes. Un graphe permet de représenter des relations (les liens) entre des éléments (les sommets).

Des situations, des concepts, abordés dans différents domaines (sciences humaines, sciences et vie de la terre, informatiques, économie, physique etc.) sont modélisables par des graphes.

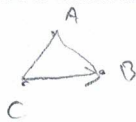
Elles permettent d'utiliser l'abstraction mathématique des graphes pour résoudre des problèmes ou expérimenter des solutions.

A Définitions

Les points A, B, C, etc. sont appelés des **sommets**.

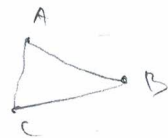
Lorsque les liaisons entre les sommets ne sont pas orientées, elles sont appelées **arêtes**.

Lorsque les liaisons sont orientées, elles sont appelées **arcs (A→B)**.



← Un graphe orienté contient au moins un arc.

Un graphe non orienté ne contient que des arêtes.



Un graphe est dit **pondéré (ou valué)** si chaque arête (arc) est associée à un nombre (le poids).

graphe non orienté :

Deux sommets sont **voisins** s'ils sont reliés par une arête. Le **degré** d'un sommet est le nombre de **voisins** d'un sommet.

Une **chaîne** est une suite d'**arêtes** qui permet de relier deux **sommets** entre eux.

La **longueur** de la **chaîne** est donnée par le nombre d'**arêtes** de la **chaîne**.

Un graphe est **connexe**, si pour tous couple de sommets il existe une **chaîne** entre ces deux sommets.

Un **cycle** est une **chaîne**, dont les deux extrémités sont reliées.

Un graphe est **complet** si tous les sommets sont reliés deux à deux.

graphe orienté :

B est le **successeur** de A, A est le **prédécesseur** de B. Le **degré** d'un sommet est le nombre d'**arcs** entrants et sortants d'un sommet.

Un **chemin** est une suite d'**arcs** qui permet de relier deux **sommets** entre eux.

La **longueur** du **chemin** est donnée par le nombre d'**arcs** du chemin.

Un graphe est fortement **connexe**, si pour tous couple de sommets il existe un **chemin** dans chaque sens entre ces deux sommets.

Un graphe est faiblement **connexe**, si pour tous couple de sommets il existe au moins un **chemin** dans un sens entre ces deux sommets.

Un **cycle** est une **chaîne**, dont les deux extrémités sont reliées, ici on ne tient pas compte du sens des arcs. Si on peut suivre les arcs pour parcourir le cycle entier, on parle de **circuit**.

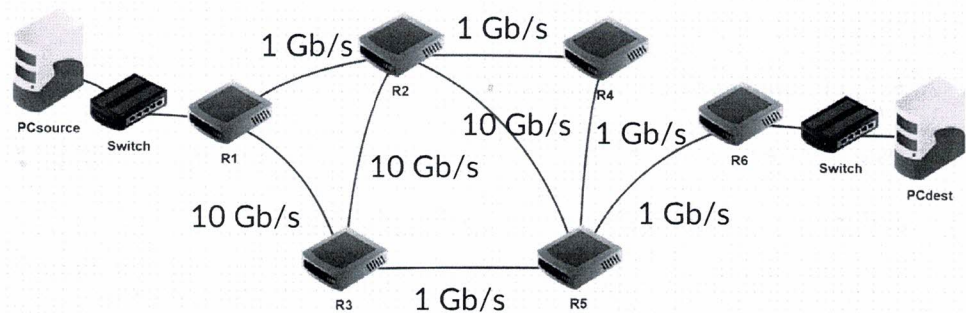
Un graphe est **complet** si tous les sommets sont reliés deux à deux, par 2 arcs d'orientation différents.

Cas particuliers des graphes : les arbres :

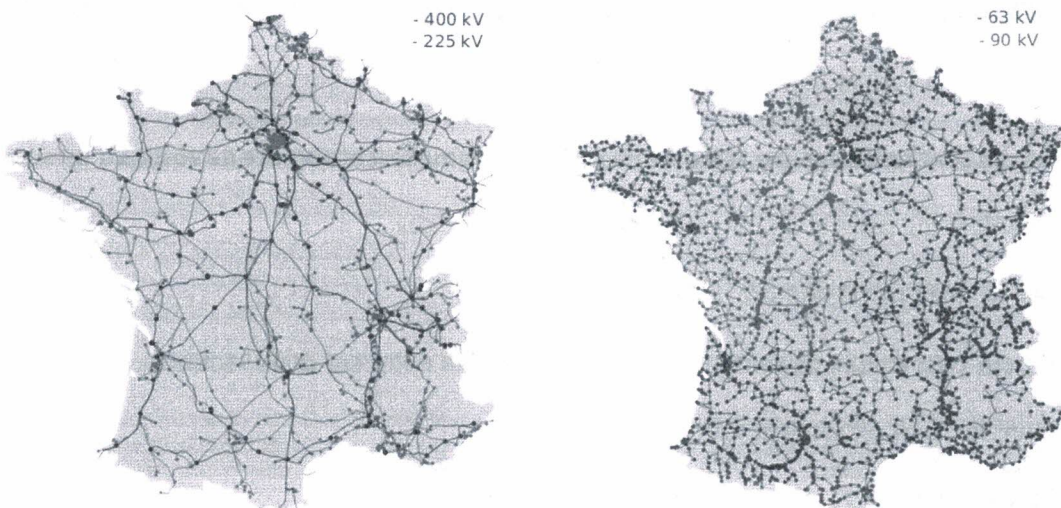
Un **arbre** est un graphe **connexe** qui ne contient pas de **cycles**.

B Exemples

Le routage utilisant le protocole RIP est modélisable par un graphe non orienté pondéré, les arêtes ont un poids. Le protocole OSPF ajoute la pc



Représentation par un graphe du réseau électrique Français :



Etudes en géographie de l'occupation des sols:

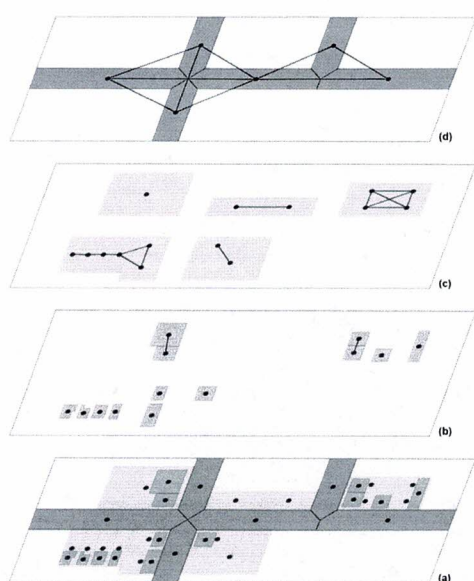


Figure 13 : (a) Représentation schématique d'un espace habité, (b) Graphe de bâtiments adjacents, (c) Graphe de parcelles adjacentes et (d) Graphe de routes adjacentes.

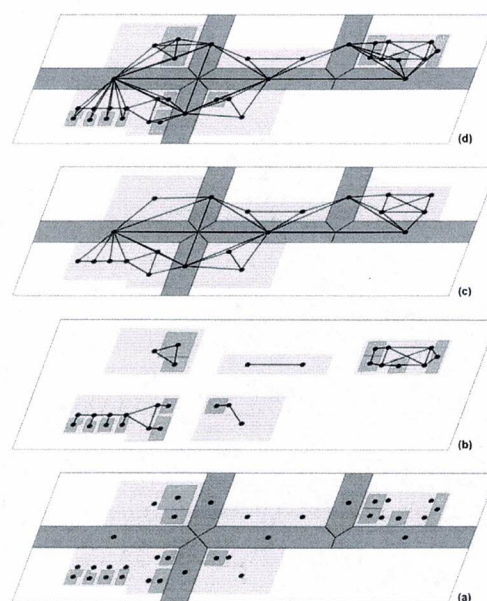
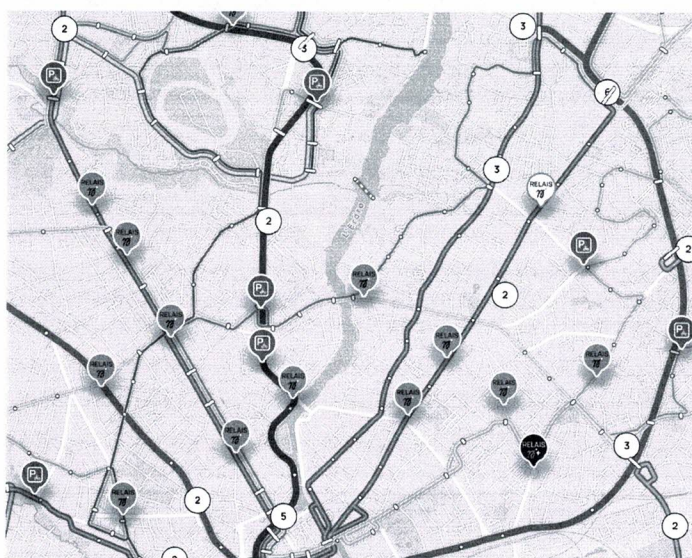
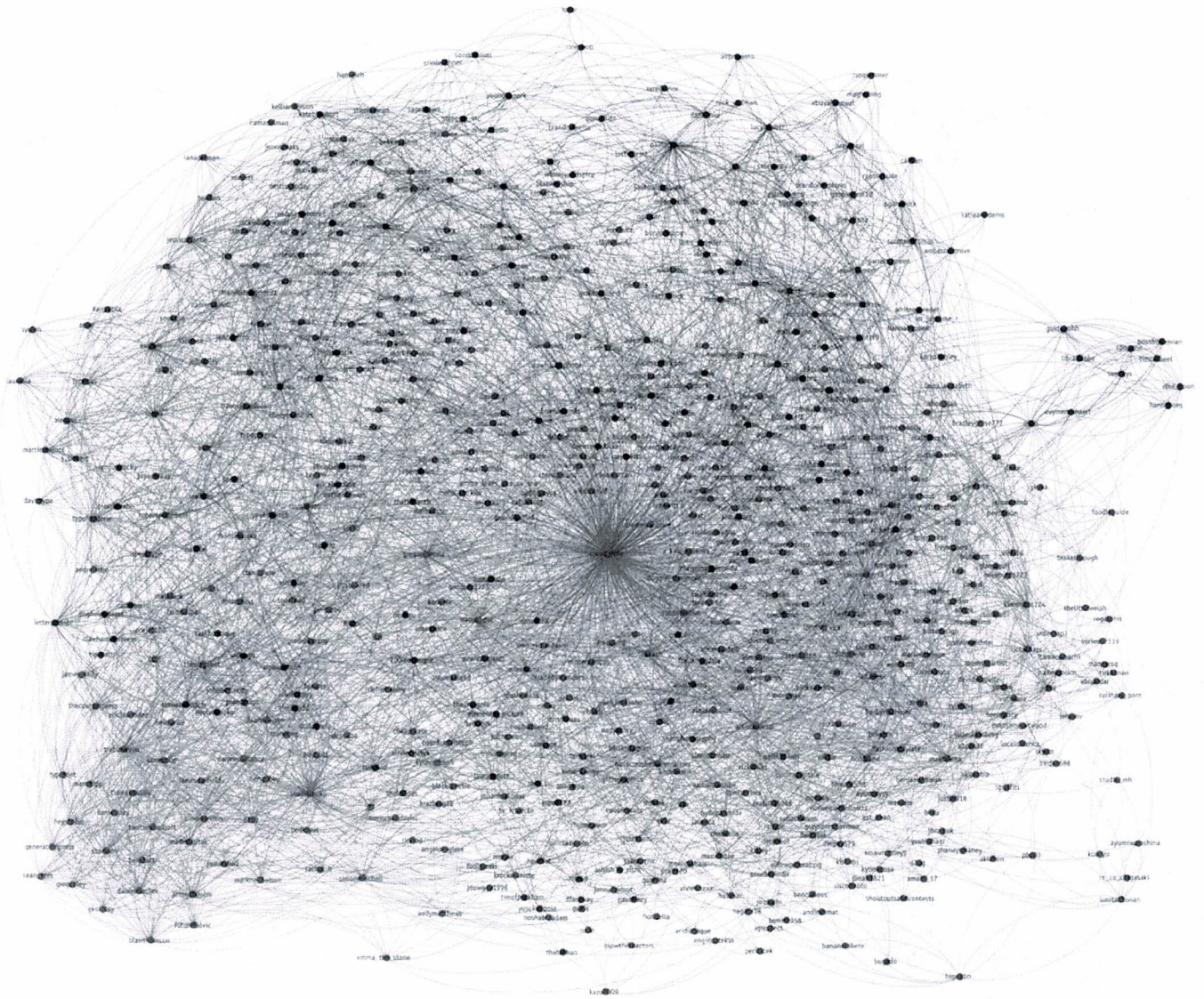


Figure 14 : (a) Représentation schématique d'un espace habité, (b) Graphe de bâtiments et de parcelles, (c) Graphe de parcelles et de routes et (d) Graphe intégral combinant bâtiments, parcelles, et routes.

Réseau de transport de l'agglomération Nantaise :



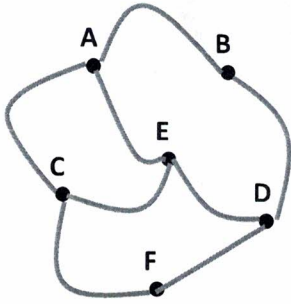
Réseau social d'une personne quelconque ?



2. Matrice d'adjacence

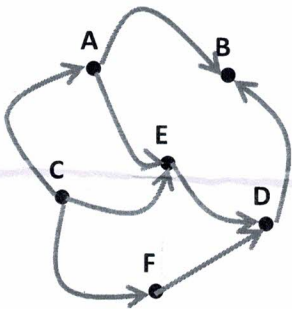
Les matrices sont des tableaux d'éléments en mathématique. La aussi, un ensemble de concepts, théorèmes et propriétés sur les matrices sont utilisables dans différents domaines.

a. Cas d'un graphe non-orienté :



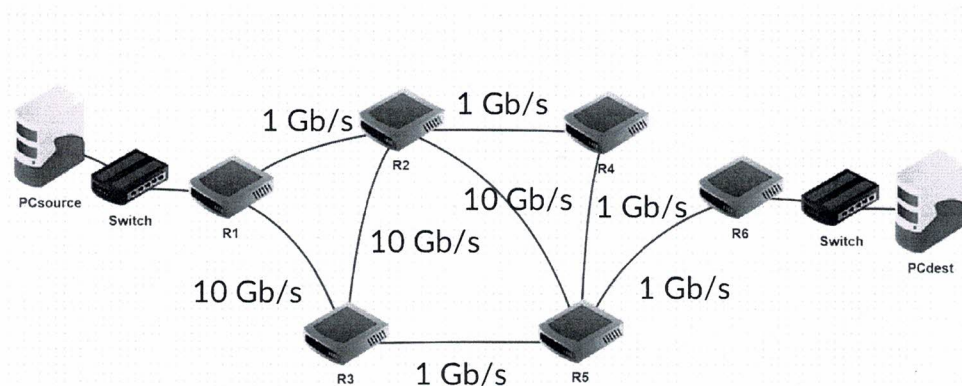
	A	B	C	D	E	F
A						
B						
C						
D						
E						
F						

b. Cas d'un graphe orienté :



	A	B	C	D	E	F
A						
B						
C						
D						
E						
F						

c. Cas d'un graphe non-orienté pondéré:



	R1	R2	R3	R4	R5	R6
R1						
R2						
R3						
R4						
R5						
R6						

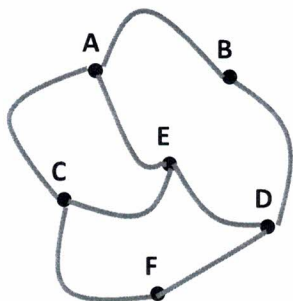
Les pondérations qui apparaissent dans la matrice sont les coûts des arêtes.

d. Hors programme

Pour trouver le nombre de chaînes ou chemin de longueur 3 pour aller de A à B, il faut élever la matrice à la puissance 3 et regarde la case (ligne A, colonne B).

Plein d'autres informations et propriétés sont déduites de cette matrice en utilisant les mathématiques.

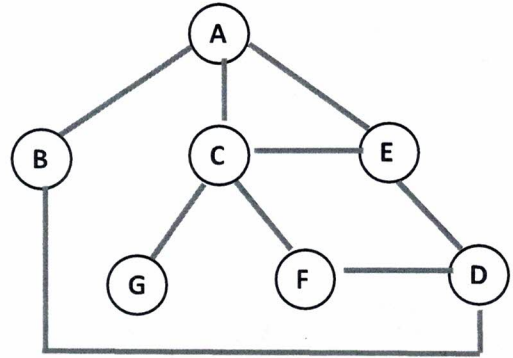
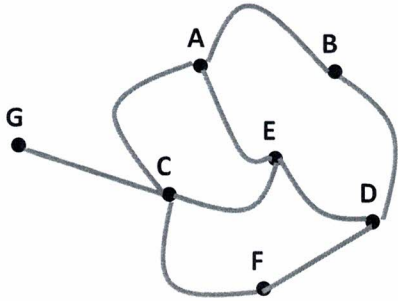
3. Liste d'adjacence



On utilise un dictionnaire en langage python:

graphe =

4. Parcours en profondeur d'un graphe DFS (Depth-First Search)

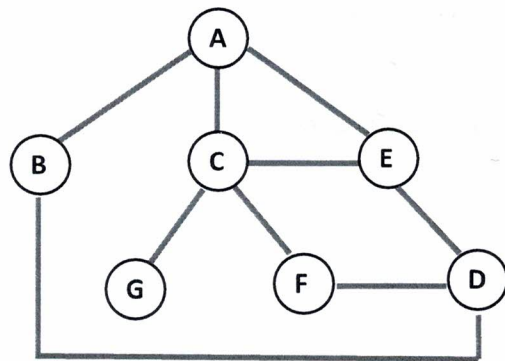
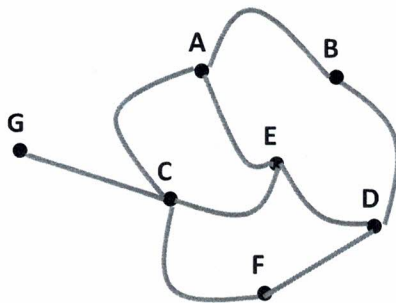


Remarque : il faut marquer les sommets déjà visités (différence avec les arbres)

Le parcours en profondeur permet de trouver la sortie d'un labyrinthe.

Algorithme : utilisation d'une pile (LIFO) ou méthode récursive pour le parcours.

5. Parcours en largeur d'un graphe BFS (Breadth-First Search)



Remarque : il faut marquer les sommets déjà visités (différence avec les arbres)

Le parcours en largeur permet d'explorer, de proche en proche, tous les sommets à distances égales du sommet d'origine. Il est applicable au problème de recherche de la plus courte distance entre le sommet source et n'importe quel autre sommet.

Algorithme : utilisation d'une file (FIFO) pour le parcours.

6. Ressources

<https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~damien.thomine/fr/archives/Enseignement1718/CAPES/MatriceAdjacence.pdf>

<https://lexique.netmath.ca/graphe/>

<https://info.blaise-pascal.fr/insi-parcours-dun-graphe/>

<https://www.youtube.com/watch?v=TlbWeeksXcl>